

Chceme dokázat, že platí následující ekvivalence:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{g(n)}{f(n)} \right) = 0 \iff g(n) = o(f(n)).$$

*Limita výrazu  $g(n)/f(n)$ , když  $n$  jde k nekonečnu je nula právě tehdy, když funkce  $g(n)$  je třídy složitosti  $o(f(n))$ .*

Definujme nejprve *little-o*:

$$g(n) = o(f(n)) \iff \forall c \in \mathbf{R} > 0 : \exists n_0 \in \mathbf{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n).$$

*Funkce  $g(n)$  je třídy složitosti  $o(f(n))$  právě tehdy, když pro všechny reálné konstanty  $c$  větší než nula existuje číslo  $n_0$  takové, že pro všechna  $n$  větší nebo rovna  $n_0$  je funkce  $g(n)$  menší než  $c \cdot f(n)$ .*

Dále definujme limitu posloupnosti (uvědomme si, že všechny „funkce“, se kterými pracujeme jsou zobrazení z přirozených čísel do přirozených čísel, čili jsou to posloupnosti):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n)) = A \iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R} > 0 : \exists n_0 \in \mathbf{N}_+ : \forall n \geq n_0 : |f(n) - A| \leq \varepsilon.$$

*Posloupnost  $f(n)$  má v nekonečnu limitu  $A$  právě tehdy, když pro všechna reálná okolí  $\varepsilon$  větší než nula existuje nějaké číslo  $n_0$  takové, že pro všechna  $n$  větší nebo rovna  $n_0$  jsou hodnoty posloupnosti vzdáleny od  $A$  méně nebo přesně  $\varepsilon$ .*

Nyní upravme definici limity pro náš případ, kdy je člen posloupnosti podíl členů dvou různých posloupností:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{g(n)}{f(n)} \right) = 0 \iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R} > 0 : \exists n_0 \in \mathbf{N}_+ : \forall n \geq n_0 : |g(n)/f(n) - 0| \leq \varepsilon.$$

Proveďme v poslední podmínce pár triviálních úprav:

$$\begin{aligned} |g(n)/f(n) - 0| &\leq \varepsilon, \\ |g(n)/f(n)| &\leq \varepsilon, \\ g(n)/f(n) &\leq \varepsilon, \\ g(n) &\leq \varepsilon \cdot f(n). \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{g(n)}{f(n)} \right) = 0 \iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R} > 0 : \exists n_0 \in \mathbf{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq \varepsilon \cdot f(n).$$

Jak vidíme, dostáváme zcela ekvivalentní definice, proto můžeme prohlásit, že ekvivalence, jejíž platnost jsme původně chtěli dokázat, skutečně platí.

Pokud chceme dokázat, že platí tato ekvivalence:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{g(n)}{f(n)} \right) = \infty \iff g(n) = \omega(f(n)),$$

vyjděme z předpokladu, že pokud je výsledkem této limity nekonečno, čítec musí jít v nekonečno do nekonečna a jmenovatel nesmí jít v nekonečno do nekonečna. Za jiných okolností limita vyjít nekonečno nemůže. Pokud toto víme, víme také, že pokud takovou limitu invertujeme (tj. prohodíme čitatele a jmenovatele), musí nutně vyjít 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{g(n)}{f(n)} \right) = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f(n)}{g(n)} \right) = 0.$$

Nejprve tedy formulujme definici *little-omega*:

$$g(n) = \omega(f(n)) \iff \forall c \in \mathbf{R} > 0 : \exists n_0 \in \mathbf{N}_+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n).$$

*Funkce  $g(n)$  je třídy složitosti  $\omega(f(n))$  právě tehdy, když pro všechny reálné konstanty  $c$  větší než nula existuje číslo  $n_0$  takové, že pro všechna  $n$  větší nebo rovna  $n_0$  je funkce  $g(n)$  větší než  $c \cdot f(n)$ .*

Upravme definici limity posloupnosti pro náš případ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f(n)}{g(n)} \right) = 0 \iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R} > 0 : \exists n_0 \in \mathbf{N}_+ : \forall n \geq n_0 : |f(n)/g(n) - 0| \leq \varepsilon.$$

Provedme triviální úpravy v podmínce:

$$\begin{aligned} |f(n)/g(n) - 0| &\leq \varepsilon, \\ |f(n)/g(n)| &\leq \varepsilon, \\ f(n)/g(n) &\leq \varepsilon, \\ f(n) &\leq \varepsilon \cdot g(n), \\ g(n) &\geq \varepsilon^{-1} \cdot f(n). \end{aligned}$$

Protože  $\varepsilon$  i  $c$  jsou reálné konstanty, můžeme zvolit  $c = \varepsilon^{-1}$  a dostáváme definici ekvivalentní definici *little-omega*. Důkaz je hotov.

Dále můžeme využít těchto vlastností:

$$\begin{aligned} o(f(n)) &\subset O(f(n)) \\ \omega(f(n)) &\subset \Omega(f(n)) \end{aligned}$$